Διάλεξη 20η

13/12/2018

Στοιχεία Διαφορικής Γεωμετρίας

- $-EK = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2) - \Gamma_{11}^1\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2$ Εξίσωση Gauss.

  - $e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2$
  - $f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2.$

  $\Bigg\}$ Εξισώσεις Mainardi-Codatti)

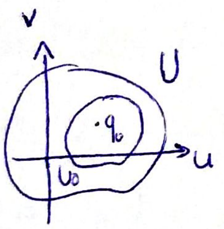
Θεμελιώδες Θεώρημα της θεωρίας των επιφανειών (Bonnet

I) Ύπαρξη Έστω λείες συν/σεις $E, F, G, e, f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ που πληρούν τα ακόλουθα.

α) $E>0, G>0, EG-F^2>0$

b) Πληρούν τις εξισώσεις Mainardi-Codatti και Gauss

Τότε $\forall$ σημείο q_0 υπάρχει περιοχή του $U_0 \subseteq U$ και απεικόνιση $X : U_0 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε $X(U_0)$ να είναι κανονική επιφάνεια με θεμελιώδη ποσά 1ης και 2ας τάξης τις δοθείσες συν/σεις E, F, G, e, f, g.



II) Μοναδικότητα Αν $\tilde{X} : U_0 \to \mathbb{R}^3$ είναι άλλη μια επιφάνεια όπως στο (I) τότε $\exists\ T \in Isom(\mathbb{R}^3)$ που διατηρεί τον προσανατολισμό $\tilde{X} = T \circ X$

$P = X(1,1)$

$$N(x,y,h(x,y)) = \frac{(-h_x(x,y), -h_y(x,y), 1)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}}$$

$$N(1,1,2) = \frac{(-2,-3,1)}{\sqrt{}}$$

Η εξίσωση του εφαπτ. επιπέδου του T_pS είναι: $-2(x-1)-3(y-1)+1(z-2)=0$.

\+ άλλο ένα ερώτημα.

Να βρεθούν αν υπάρχουν τα ελλειπτικά, υπερβολικά, παραβολικά, ισόπεδα ή ομφαλικά σημεία του S.

Λύση

$E = 1 + h_x^2 = 1 + 4x^2$

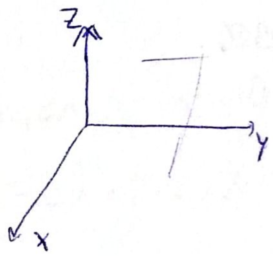
$F = h_x h_y = 6xy^2$

$G = 1 + h_y^2 = 1 + 9y^4$

$e = \frac{h_{xx}}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{}}$

$f = \frac{h_{xy}}{\sqrt{}} = 0$

$g = \frac{h_{yy}}{\sqrt{}} = \frac{6y}{\sqrt{}}$



- Ελλειπτικά σημεία: $K > 0 \iff eg - \cancel{f^2}^{0} > 0 \iff g > 0 \iff y > 0$

  Είναι το σύνολο $S \cap \{(x,y,z) / y > 0\}$.

- Υπερβολικά σημεία: $K < 0 \iff eg - f^2 < 0 \iff g < 0 \iff y < 0$

  Είναι το σύνολο $S \cap \{(x,y,z) / y < 0\}$

- Παραβολικά σημεία: $K = 0 \neq H \iff eg - \cancel{f^2}^{0} = 0$ και $II \neq 0 \iff g = 0$ και $II \neq 0 \iff g = 0$

  Τα παραβολικά σημεία είναι της μορφής: $X(x,0) = (x,0,x^2)$

  παραβολή στο Oxz.

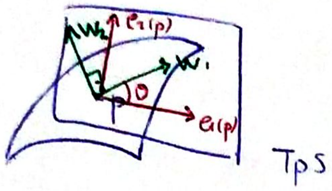
- Ισόπεδα σημεία: $II = 0 \iff e = g = f = 0$ δεν υπάρχουν αφού $e > 0$

- Ομφαλικά σημεία: $\frac{e}{E} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G} \neq 0$ $\begin{cases} e = \lambda E \\ f = \lambda F \\ g = \lambda G \end{cases}$ $\lambda \neq 0 \iff \begin{cases} e = \lambda E \\ F = 0 \\ g = \lambda G \end{cases}$ $\lambda \neq 0$

Άσκηση

Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα καθέτων καμπυλοτήτων εφαπτομένων διευθύνσεων στο τυχόν σημείο p κανονικής επιφάνειας είναι ίσο με $2H(p)$ αν οι διευθύνσεις είναι μεταξύ τους κάθετες

Λύση



$w_1, w_2 \in T_pS$

$\|w_1\| = 1 = \|w_2\|$

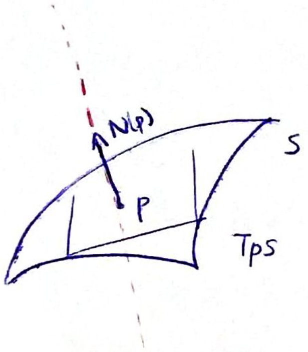
$\langle w_1, w_2 \rangle = 0$

$$K_n(w_1) + K_n(w_2) = 2H(p)$$

Από τον τύπο του Euler έχω $K_n(w_1) = K_1(p)\cos^2\theta + K_2(p)\sin^2\theta \quad (1)$

$$K_n(w_2) = K_1(p)\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) + K_2(p)\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= K_1(p)\sin^2\theta + K_2(p)\cos^2\theta \quad (2)$$

$$K_n(w_1) + K_n(w_2) = K_1(p) + K_2(p) = 2H(p)$$



P_0 : κάθετη ευθεία της S στο $p \in S$.

Άσκηση

Έστω S συνεκτική επιφάνεια της οποίας όλες οι κάθετες ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο P_0. Δείξτε ότι είναι τμήμα σφαίρας

Λύση

από υπόθεση γνωρίζω ότι $\forall p \in S \ \exists \lambda = \lambda(p)$ και $P_0 = p + \lambda(p) N(p) \iff$
$P_0 = Id + \lambda N, \quad \lambda : S \to \mathbb{R}$

$\lambda(p) = \langle P_0 - p, N(p) \rangle$.

$\lambda = \langle P_0 - Id, N \rangle$ είναι λεία.

$P_0 = Id + \lambda N \Longrightarrow 0 = dId_p + d(\lambda N)_p \overset{\forall p \in S}{\iff} 0 = Id_{T_pS} + d\lambda_p N(p) + \lambda(p)\, dN_p$
$\iff 0 = Id_{T_pS} + d\lambda_p N(p) - \lambda(p) L_p \iff 0 = w + d\lambda_p(w) N(p) - \lambda(p) L_p w \quad \forall w \in T_pS$

$(\alpha,\beta,\gamma) \in \left\{ (x,y,z) \in S^2 \,/\, -\frac{1}{\sqrt{2}} < z < \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$

$\exists\, (x,y,z) \in S_2 : \; N(x,y,z) = (\alpha,\beta,\gamma)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{2z^2+1}} = \alpha \iff x = \alpha\sqrt{2z^2+1} \\[2ex] \dfrac{y}{\sqrt{2z^2+1}} = \beta \iff y = \beta\sqrt{2z^2+1} \\[2ex] \dfrac{-z}{\sqrt{2z^2+1}} = \gamma \Longrightarrow \text{Έχει μοναδική λύση ως προς } z. \end{cases}$$

Έχω μοναδική $\Longrightarrow$ λύση συστήματος $\quad N : S_2 \to \left\{ (x,y,z) \in S^2 \,/\, -\frac{1}{\sqrt{2}} < z < \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$ Είναι διαφορομορφισμ

__Άσκηση__.

Δίνεται η επιφάνεια $S : z = x^2 + y^3$

i) Είναι κανονική επιφάνεια.

ii) Αν ναι, να βρεθεί ένα σύστημα συντεταγμένων και να γίνει γεωμ περιγραφή των παραμετρικών καμπυλών.

iii) Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτ επιπέδου στο σημείο της $p = (1,1,2)$

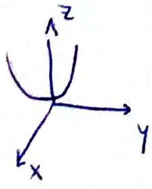
__Λύση__

i) Η S είναι επιφάνεια γράφημα της $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$h(x,y) = x^2 + y^3$ άρα κανονική με σύστημα συν/νων

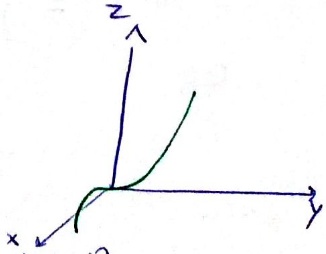
ii) $X : \mathbb{R}^2 \to S \quad , X(x,y) = (x, y, x^2 + y^3)$

Οι παραμετρικές καμπύλες $y = y_0 = \text{σταθ.}$

$x \longmapsto X(x, y_0) = (x, y_0, x^2 + y_0^3) = (0, y_0, y_0^3) + (x, 0, x^2)$



Είναι παραβολές που περιέχονται στο επίπεδο $y = y_0$.



Οι παραμετρικές καμπύλες $x = x_0 = \text{σταθ}$

$y \longmapsto X(x_0, y) = (x_0, y, x_0^2 + y^3) = (x_0, 0, x_0^2) + (0, y, y^3)$ Κυβικές καμπύλες που περιέχονται στα επίπεδα $x = x_0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{}} = \lambda(1+4x^2) \\ xy^2=0 \quad \lambda\neq 0 \\ \frac{6y}{\sqrt{}} = \lambda(1+9y^4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4x^2+9y^2+1}} = \lambda(1+4x^2) \\ x=0 \text{ ή } y=0 \quad , \lambda\neq 0 \\ \frac{6y}{\sqrt{}} = \lambda(1+9y^4) \end{cases}$$

Περίπτωση $x=0$

$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{9y^4+1}} = \lambda \\ \frac{6y}{\sqrt{9y^4+1}} = \lambda(1+9y^4) \end{cases} \lambda\neq 0 \Leftrightarrow \frac{6y}{\sqrt{9y^4+1}} = \frac{2}{\sqrt{9y^4+1}}(1+9y^4)$$

$$\Leftrightarrow 3y = 1+9y^4$$

$$\Leftrightarrow 9y^4-3y+1=0$$

$9y^4-3y+1>0 \quad \forall y$. (θεωρω συνάρτηση ως προς y και από Απει βλέπω ότι έχει ολικό μέγιστο)

Περίπτωση $y=0$

Δεν υπάρχουν

Άσκηση.

Δίνεται η παραμετρική Επιφάνεια (Eureger)

$$X(u,v) = \left(u-\frac{u^3}{3}+uv^2,\ v-\frac{v^3}{3}+vu^2,\ u^2-v^2\right)$$

1) Είναι κανονική;
2) Να βρεθεί I, II
3) K=; H=;

Λύση

$$X_u = (1-u^2+v^2,\ 2uv,\ 2u)$$

$$X_v = (2uv,\ 1-v^2+u^2,\ -2v)$$

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1-u^2+v^2 & 2uv & 2u \\ 2uv & 1-v^2+u^2 & -2v \end{vmatrix} \overset{\text{πράξεις}}{=} \ldots (-2u^3-2uv^2-2u,\ 2v^3+2u^2v+2u,\ 1-2u^2v^2-u^4-v^4)$$

$$= (-2u(u^2+v^2+1),\ 2v(u^2+v^2+1),\ 1-(u^2+v^2)^2)$$

$$=(-2u(u^2+v^2+1),\ 2v(u^2+v^2+1),\ (1-u^2-v^2)(1+u^2+v^2)) \Rightarrow$$

Οι κύριες καμπυλότητες είναι

$$K_1 = H + \sqrt{H^2 - K} = \sqrt{-K} = \frac{2}{E}$$

$$K_2 = H - \sqrt{H^2 - K} = -\sqrt{-K} = -\frac{2}{E}$$

$$K_1 > K_2$$

$$F = f = 0$$

Άσκηση

Δίνεται η παραμετρική επιφάνεια

$X(u,v) = (u - h(u-v), u, v)$ $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ και $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λεία συν/m.

i) Να δειχθεί ότι είναι κανονική

ii) Να υπολογιστεί η καμπυλότητα Gauss.

iii) Να αποδειχθεί ότι όλα τα εφαπτ. επίπεδα είναι // προς σταθερό διάνυσμα

Λύση

$$\left.\begin{array}{l} X_u(u,v) = (1 - h'(u-v), 1, 0) \\ X_v(u,v) = (h'(u-v), 0, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow X_u \times X_v(u,v) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1-h' & 1 & 0 \\ h' & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow X_u \times X_v(u,v) = (1, h'(u-v) - 1, -h'(u-v)) \neq (0,0,0)$$

$\Rightarrow$ Η X είναι κανονική.

$1^{η}$ θεμελιώδης μορφή

$$E(u,v) = \| X_u(u,v) \|^2 = 1 + (1 - h'(u-v))^2$$

$$F(u,v) = \langle X_u, X_v \rangle = h'(1-h')$$

$$G(u,v) = \| X_v(u,v) \|^2 = 1 + h'^2$$

$2^{η}$ θεμελιώδης μορφή

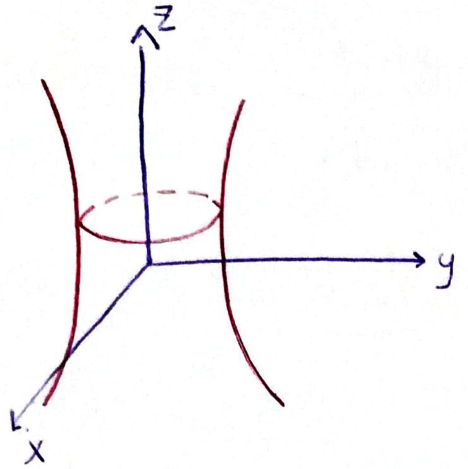
$$N(u,v) = \frac{X_u \times X_v}{\| X_u \times X_v \|}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1 + (h'-1)^2 + (h')^2}}(1, h'-1, -h')$$

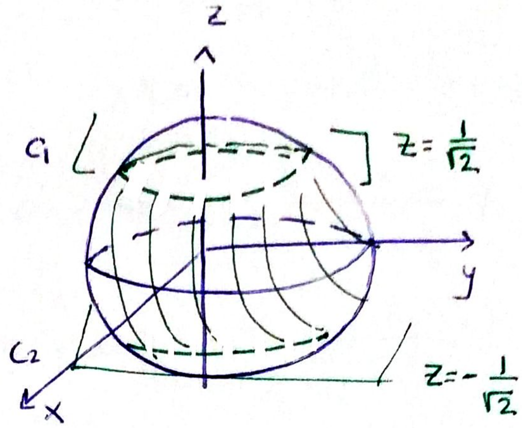
$$X_{uu}(u,v) = (-h''(u-v), 0, 0)$$

$$X_{uv}(u,v) = (h''(u-v), 0, 0)$$

$$X_{vv}(u,v) = (-h''(u-v), 0, 0)$$

b) $S_2 : x^2+y^2-z^2=1$





$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-1$

$S_2 = f^{-1}(0)$ Η απεικόνιση Gauss είναι:

$$N: S_2 \to S^2 , \quad N(x,y,z) = \frac{\text{grad} f(x,y,z)}{\|\text{grad} f(x,y,z)\|} = \frac{(2x,2y,-2z)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{(x,y,-z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{N(x,y,z) = \frac{(x,y,-z)}{\sqrt{2z^2+1}}}$$

Ερώτημα: $N(S_2) = ?$

Θα έχω την εξίσωση $\dfrac{-z}{\sqrt{2z^2+1}}$

$$\left| -\frac{z}{\sqrt{2z^2+1}} \right| = \frac{|z|}{\sqrt{2z^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq -\frac{z}{\sqrt{2z^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$N(S_2) \subseteq \left\{ (x,y,z) \in S^2 / -\frac{1}{\sqrt{2}} < z < \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

Ερώτημα $N(S_2) \overset{?}{=} \left\{ (x,y,z) \in S^2 / -\frac{1}{\sqrt{2}} < z < \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$

~~Οχι~~

$$\lim_{z \to \pm\infty} \frac{z}{\sqrt{2z^2+1}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$ Υπάρχουν σημεία στο $N(S_2)$ όσο κοντά θέλουμε στις καμπύλες c_1, c_2.

Άσκηση Να βρεθεί η εικόνα της απεικόνισης Gauss των επιφανειών

(a) $S_1: z=x^2+y^2$, (b) $S_2: x^2+y^2-z^2=1$.

Λύση

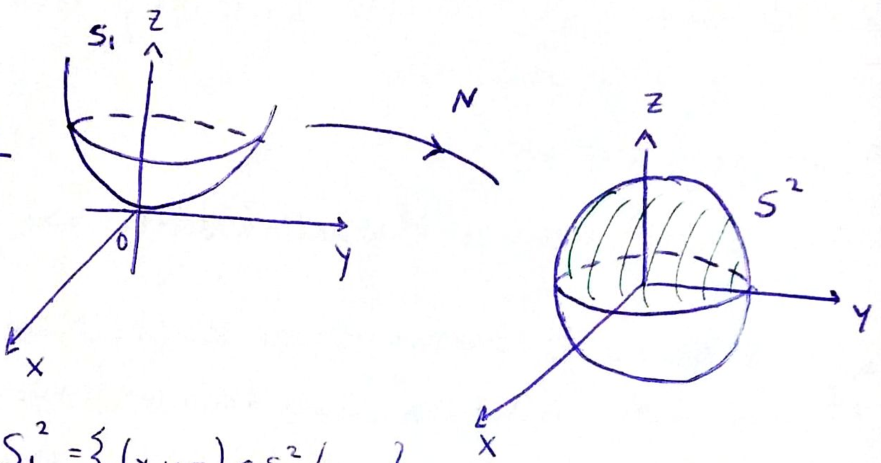
α) Η S_1 είναι γράφημα της $h(x,y)=x^2+y^2$

Άρα η απεικόνιση Gauss είναι: $N: S_1 \to S^2$

$$N(x,y,h(x,y)) = \frac{(-h_x(x,y), -h_y(x,y))}{\sqrt{h_x^2(x,y)+h_y^2(x,y)}}, \quad K=\frac{h_{xx}h_{yy}-h_{xy}^2}{(h_x^2+h_y^2+1)^2} > 0$$

$h_x(x,y)=2x$, $h_y(x,y)=2y$

$$N(x,y,x^2+y^2)=\frac{(-2x,-2y,1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$$



Παρατηρώ ότι $N(S_1) \subseteq S^2_+ = \{(x,y,z)\in S^2 / z>0\}$

Ερώτηση: $N(S_1) = S^2_+$?

Έστω $(\alpha,\beta,\gamma)\in S^2_+$:
$$\begin{cases} \dfrac{-2x}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}=\alpha \\ \dfrac{-2y}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}=\beta \\ \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+4y+1}}=\gamma \end{cases} \iff \begin{cases} -2x\gamma=\alpha \\ -2y\gamma=\beta \\ \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}=\gamma \end{cases} \iff \begin{cases} x=-\dfrac{\alpha}{2\gamma} \\ y=-\dfrac{\beta}{2\gamma} \\ \gamma=\dfrac{1}{\sqrt{\cdots}} \end{cases}$$

Άρα $N: S_1 \to S^2_+$ διαφορομορφισμός.

$\to X_u \times X_v = (u^2+v^2+1)\left(-2u, 2v, 1-u^2-v^2\right) \neq (0,0,0) \Rightarrow$ Η X είναι κανονική.

1η θεμελιώδης μορφής.

$$E = \|X_u\|^2 = (1-u^2+v^2)^2 + 4u^2v^2 + 4u^2$$
$$= 1+u^4+v^4-2u^2+2v^2-2u^2v^2+4u^2v^2+4u^2$$
$$= 1+u^4+v^4+2u^2v^2+2u^2+2v^2$$
$$= (1+u^2+v^2)^2$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = 0$$

$$G = \|X_v\|^2 = (1+v^2+u^2)^2$$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = (1+u^2+v^2)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2η θεμελιώδης μορφή.

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$$

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{EG - \cancel{F^2}^{\,0}} \overset{E=G}{=} \sqrt{E \cdot E} = E = (1+u^2+v^2)^2$$

άρα $N = \dfrac{1}{1+u^2+v^2}\left(-2u, -2v, 1-u^2-v^2\right)$

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle = 2$$
$$f = \langle X_{uv}, N \rangle = 0$$
$$g = \langle X_{vv}, N \rangle = 2$$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-4}{E^2} = \dots < 0 \qquad H = \frac{Fg - 2Ff + eG}{2(EG - F^2)} = \frac{E(e+g)}{2E^2} = 0.$$

$e = \langle X_{uu}, N \rangle = \dfrac{-h''(u-v)}{\sqrt{}}$

$f = \langle X_{uv}, N \rangle = \dfrac{h''(u-v)}{\sqrt{}}$

$g = \langle X_{vv}, N \rangle = \dfrac{-h''(u-v)}{\sqrt{}}$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\dfrac{(h''(u-v))^2}{\sqrt{}^{\,2}} - \dfrac{(h''(u-v))^2}{\sqrt{}}}{\dots} \Rightarrow K = 0.$$

$$N(u,v) = \frac{1}{\sqrt{}}\left(1, h'(u-v) - 1, -h'(u-v)\right) \perp (1,1,1)$$

$(\alpha, \beta, \gamma) \dots$

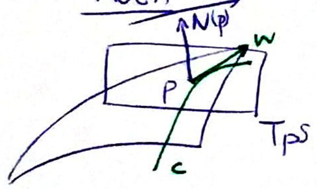
$\alpha + \beta + \gamma = 0.$

Άσκηση

Έστω S κανονική της οποίας τα εφαπτόμενα επίπεδα είναι παράλληλα προς σταθερό διάνυσμα. $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$.

Αποδείξτε ότι η καμπυλότητα Gauss είναι $K=0$.

Λύση $\vec{\alpha}'$



Από υπόθεση έχω $\langle N(p), \vec{\alpha}' \rangle = 0 \ \forall p \in S$.

$h : S \to \mathbb{R}$

$h(p) = \langle N(p), \vec{\alpha}' \rangle$.

$dh_p : T_pS \to \mathbb{R} \qquad w \in T_pS \qquad c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ με $c(0) = p,\ c'(0) = w$

$dh_p(w) = (h \circ c)'(0)$

$h \circ c(t) = h(c(t)) = \langle N(c(t)), \vec{\alpha}' \rangle$

$(h \circ c)'(t) = \langle (N \circ c)'(t), \vec{\alpha}' \rangle$

$dh_p(w) = \langle (N \circ c)'(0), \vec{\alpha}' \rangle = \langle dN_p(w), \vec{\alpha}' \rangle \Rightarrow$

$dh_p(w) = -\langle L_p w, \vec{\alpha}' \rangle$

Επειδή $h = 0 \Rightarrow dh_p = 0 \ \forall p$.

$\vec{\alpha} \in T_pS \ \forall p$

$\Big\} \Rightarrow \langle L_p w, \vec{\alpha} \rangle = 0 \quad \forall p \in S \quad \forall w \in T_pS.$

$\downarrow$ δεν γίνεται πάντα

$\langle L_p \vec{\alpha}, w \rangle = 0 \qquad \forall w \in T_pS \Rightarrow L_p \vec{\alpha} = \vec{0} = 0 \cdot \vec{\alpha}$

$\Rightarrow k_1(p) k_2(p) = 0 \Rightarrow K(p) = 0$

$$\Longleftrightarrow 0 = \underbrace{w - \lambda(p) L_p w}_{\in T_pS} + d\lambda_p(w) N(p)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} w - \lambda_p L_p w = 0 & \Rightarrow \lambda \neq 0 \\ d\lambda_p(w) = 0 \quad \forall p, \forall w & \Rightarrow d\lambda_p = 0 \ \text{ΠΑΝΤΟΥ.} \end{cases}$$

Αφού συνεκτική

$\Longrightarrow \lambda$ σταθερά.

$p_0 = p + \lambda N(p) \Longrightarrow p - p_0 = -\lambda N(p)$

$\| p - p_0 \| = |\lambda| > 0$

$d(p, p_0) = |\lambda|$